

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ BAYES

ΜΑΘΗΜΑ: 2

① Έστω X_1, X_2, X_3 τ.δ. από κανονική $\in N(\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, σ : γνωστή σταθερά.

Να υπολογιστεί:

α) Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (ΜΤΣ) του $\bar{x}$ δηλ. $E(\bar{x} - \theta)^2$

β) Το μέσο ΑΣ του $\bar{x}$, δηλ. $E|\bar{x} - \theta|$

(α) $E(\bar{x} - \theta)^2 = \text{Var} \bar{x} + (E\bar{x} - \theta)^2$
 $R(\theta, \bar{x})$

1ος Τρόπος

$$\text{Var} \bar{x} = \text{Var} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E\bar{x} = E \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{n\theta}{n} = \theta$$

Άρα $E(\bar{x} - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + (\theta - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow E(\bar{x} - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

2ος Τρόπος

Γνωρίζουμε ότι $\bar{x} \sim N(\theta, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow E\bar{x} = \theta$ και $\text{Var} \bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$

Άρα $E(\bar{x} - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

(β) $E|\bar{x} - \theta| = \int |\bar{x} - \theta| f_{\bar{x}}(\bar{x}) d\bar{x} = \int |y - \theta| f_y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y - \theta| \left(2\pi \frac{\sigma^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(y-\theta)^2} dy =$

$\stackrel{y-\theta=z}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \left(2\pi \frac{\sigma^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}z^2} dz = 2 \int_0^{+\infty} z \left(2\pi \frac{\sigma^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}z^2} dz$

από αλλαγή
 $f(z) = f(-z)$

Για να βρω το ολοκλήρωμα, αρκεί να παρατηρήσω ότι η παράγωγος $\left(e^{-\frac{n}{2\sigma^2}z^2}\right)' = -z \frac{n}{\sigma^2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}z^2}$

Άρα $R(\theta, d) = R(\theta, \bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \sigma$

Επομένως για διαφορετική αλλαγή απώλειας, έχουμε διαφορετική συνάρτηση διακινδύνευσης.

② Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από $B(1, \theta)$
 Δηλαδή $f(x; \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0, 1$, $0 < \theta < 1$

α) Να βρεθεί το ΜΤΣ του $\bar{x}$

β) Να βρεθεί ένα άνω όριο για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του $\bar{x}$ και να σχολιαστεί

$$\alpha) R(\theta, \bar{x}) = E(\bar{x} - \theta)^2 = \text{Var } \bar{x} + (E\bar{x} - \theta)^2$$

$$\text{Var } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i = \frac{1}{n} \theta(1-\theta)$$

$$E\bar{x} = \frac{1}{n} \sum E X_i = \theta$$

$$\text{Άρα } R(\theta, \bar{x}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

β) Άρκει να βρω ένα άνω όριο για $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ ή ισοδύναμα για την $g(\theta) = \theta(1-\theta) =$
 $= \theta - \theta^2$

$$g'(\theta) = 1 - 2\theta$$

$$g'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \text{ σημείο μεγίστου}$$

$$g''(\theta) = -2$$

$$\text{Άρα } g(\theta) \leq g(0,5) = 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } R(\theta, \bar{x}) \leq \frac{1}{4n}$$

$$\text{Αν } n=1000, \text{ όριο} = \frac{1}{4000}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4000}} = 0,0158 \text{ δηλ. } 1,6\%$$

Η συνάρτηση απώλειας το ΤΣ δείχνει ότι $R(\theta, d) = \text{Var } d + (E d - \theta)^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΑΠΕΡΟΛΗΨΙΑ): Ένας εκτιμητής της παραμέτρου έστω θ , είναι αμερόληπτος, αν $E d(x) = \theta$

Έχει υπερεκτίμηση αν $E d > \theta$

υποεκτίμηση αν $E d < \theta$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε στατιστική συνάρτηση (σ.σ.) είναι αμερόληπτος εκτιμήτης της μέσης τιμής της

Έστω $T(\underline{x})$ μια σ.σ. με $ET(\underline{x}) = g(\theta)$

Τότε προφανώς $T(\underline{x})$ αμερόληπτος εκτιμήτης της $g(\theta)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αμερόληπτος εκτιμήτης της πληθυσμιακής μέσης τιμής, έστω μ είναι η δείγματική μέση τιμή. Στην περίπτωση τ.δ. μεγέθους n , η διακύμανση της δείγμ. μέσης τιμής είναι $\frac{\sigma^2}{n}$, όπου σ^2 η πληθ. διακύμανση

Απόδειξη:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{η δείγματική μέση τιμή}$$

$$\text{λογικά} \quad E\bar{X} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

$$\text{Var } \bar{X} = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ με $n \geq 2$ από έναν πληθυσμό με $EX_i = \mu$

και $\text{Var } X_i = \sigma^2$

α) Αν μ γνωστή, τότε $T(\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$ αμερόληπτος της σ^2

β) Αν μ άγνωστη τότε ~~$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$~~
 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ αμερόληπτος της σ^2

Απόδειξη:

$$\text{α) } ET(\underline{x}) = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2$$

$$\text{αφού } E(X - \mu)^2 = \text{Var } X$$

8) $\theta \delta_0 \quad ES^2 = \sigma^2$

$$E\left\{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2\right\}$$

λογizei ότι $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 =$

$$\underline{\underline{\sum x_i = n\bar{x}}} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Ενδεχόμενα $ES^2 = \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right\} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E x_i^2 - n E \bar{x}^2\right) =$

$$\underline{\underline{E x_i^2 = \text{Var } X_i + (E X_i)^2}} \quad \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (\text{Var } X_i + (E X_i)^2) - n(\text{Var } \bar{x} + (E \bar{x})^2) \right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (\sigma^2/n + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2) \right\} = \sigma^2$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ: α) Έστω $T(x)$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ και a, b σταθερές.

Τότε $aT(x) + b$ αμερόληπτος εκτιμητής της $ag(\theta) + b$

β) Έστω $T_i(x)$ αμερόληπτος της $g_i(\theta)$ για $i=1, 2, \dots, k$. Τότε $\sum_{i=1}^k a_i T_i(x)$ αμερόληπτος της $\sum a_i g_i(\theta)$

Απόδειξη:

α) $T(x)$ αμερ. της $g(\theta)$ σημαίνει $ET(x) = g(\theta)$

$\theta \delta_0 \quad aT(x) + b$ αμερ. της $ag(\theta) + b$.

Άρα $E(aT(x) + b) = ag(\theta) + b$

Είναι: $E(aT(x) + b) = aET(x) + b = \cancel{ag(\theta) + b} = ag(\theta) + b$

β) $E\left(\sum_{i=1}^k a_i T_i(x)\right) = \sum_{i=1}^k E(a_i T_i(x)) = \sum a_i E T_i(x) = \sum a_i g_i(\theta)$

□

Π.χ.
Για να βρω αμερ.
εκτιμητή του $\theta - \theta^2$
πρέπει να βρω
αμερ. εκτ. για θ και
αμερ. εκτ. για θ^2

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι αμερόληπτοι εκκλήτες μιας παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ είναι είτε 0 είτε 1 είτε άπειροι.

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχουν 2 ακριβώς αμερόληπτοι εκκλήτες T_1 και T_2 , δηλαδή

$$E T_1 = E T_2 = g(\theta)$$

Η υπόθεση αυτή οδηγεί σε άτοπο διότι $E[aT_1 + (1-a)T_2] = aE T_1 + (1-a)E T_2 =$

$$= a g(\theta) + (1-a) g(\theta) = g(\theta) \quad \forall a \in (0,1)$$

Αν $\exists$ δύο αμερόληπτοι $\rightarrow \exists$ άπειροι αμερόληπτοι.

Άρα υπάρχουν είτε 0 είτε 1 είτε άπειροι αμερόληπτοι εκκλήτες. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

① Έστω τ.δ. $x_1, x_2, \dots, x_n$ από $B(1, \theta)$, άρα $f(x_i; \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$, $x_i = 0, 1, 0 < \theta < 1$.

Μπορεί να προσδιοριστεί αμερόληπτος εκκλήτης του $\theta^{n+1}, \frac{\theta}{1-\theta}$;

Λύση:

Θα πρέπει να εξετάσω αν υπάρχει $T(x)$, τ.ω. $E T(x) = g(\theta)$

$$E T(x) = \sum t(x) \sigma.π. x$$

$\sigma.π. x = n$ από κοινού κατανομή $x_1, \dots, x_n$

$$= f(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{x_1 + \dots + x_n} (1-\theta)^{1-x_1 + 1-x_2 + \dots + 1-x_n} =$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \text{ Άρα βρήκαμε τον από κοινού κατανομή και}$$

$$\text{δίνεται } \left(\sum_x t(x) \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i} \right) = g(\theta)$$

Δυνατές τιμές $\sum x_i = 0, 1, 2, \dots, n$

Δεν μπορεί να βρούμε αμερόληπτο εκκλήτη για το θ^{n+1}

Δεν μπορεί να βρούμε αμερόληπτο εκκλήτη για το $\frac{\theta}{1-\theta}$

Πολλώτερο ως προς θ το ποτήρι
ή βαθύ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

② Έστω x μια παρατήρηση από την Poisson κατανομή $P(\theta)$
 $f(x; \theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, x=0, 1, 2, \dots$

ΝΑΟ $\exists$ μοναδικός αμερόληπτος της παραμέτρου θ

Λύση: Όταν x ακολουθεί Poisson, δηλ. $x \sim P(\theta)$, τότε $E x = \theta$

Άρα $\exists$ ένας εκκενρής, πίνει νόο είναι μοναδικός

Έστω $\pi(x)$ μια συν/ση του x τ.ω. $E\pi(x) = \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} t(x) P(X=x) = \theta \Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \theta$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \theta e^{\theta} \quad (1)$$

Γνωρίζω ότι $e^{\theta} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\theta^x}{x!}$

Άρα η (1) δίνει: $\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{+\infty} \theta \frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\theta^{x+1}}{x!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} t(x) \frac{\theta^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\theta^x}{(x-1)!} \quad (2)$$

$$t(0) \frac{\theta^0}{0!} + t(1) \frac{\theta^1}{1!} + \dots = \frac{\theta^1}{0!} + \frac{\theta^2}{1!} + \dots$$

Άρα $t(0)=0$ $\frac{t(2)}{2!} = \frac{1}{1!}$

$$\frac{t(1)}{1!} = \frac{1}{0!}$$

Ευαγγελικά από την (2)

$$t(0) \frac{\theta^0}{0!} + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{t(x) \theta^x}{x!} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\theta^x}{(x-1)!}$$

Άρα πρέπει $t(0)=0$

$$\frac{t(x)}{x!} = \frac{1}{(x-1)!} \quad x=1, 2, \dots$$

$$\boxed{t(x) = x, \quad x=1, 2, \dots} \quad \text{μοναδικός αμερόληπτος εκκενρής}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Όταν η συνάρτηση απώλειας είναι το τετραγωνικό σφάλμα τότε $R(\theta, d) = \frac{1}{2} r d + (fd - \theta)^2$
Αν $fd = \theta$ τότε $R(\theta, d) = \frac{1}{2} r d$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια αντίσφαση d_1 είναι ισοδύναμη με μία αντίσφαση d_2 αν $R(\theta, d_1) = R(\theta, d_2)$
 $\forall \theta \in \Theta$

Η d_1 είναι καλύτερη από d_2 αν $R(\theta, d_1) \leq R(\theta, d_2) \forall \theta$
και $R(\theta_*, d_1) < R(\theta, d_2)$ για κάποιο θ .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας εκτιμητής λέγεται παραδεκτός ή αποδεκτός αν δεν υπάρχει καλύτερος

ΠΡΟΤΑΣΗ: Με βάση το ΜΤΣ δεν υπάρχει παραδεκτός εκτιμητής της μ αν σκεφτούμε
παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$

(απόδειξη του αλήθ γράφω)